薬学情報処理演習　第4回

生物個体数変化の数理モデル

奥薗　透

コロイド･高分子物性学

被食者・捕食者のモデル

- Lotka-Volterra 方程式
  - 2種の生物個体数の時間変化

$$\frac{dX}{dt} = AX - XY$$
$$\frac{dY}{dt} = XY - BY$$

X: 被食者の個体数
Y: 捕食者の個体数
A, B (>0): 定数

Xは一定の割合で増殖するが、Yに食われる。
YはXを食べて増殖するが、一定の割合で死滅する。

  - 等価な化学反応系（A, B の濃度は一定に保つ）

$A + X \rightarrow 2X$
$X + Y \rightarrow 2Y$
$Y + B \rightarrow E + B$

【参考文献】
ニコリス, プリゴジーヌ『散逸構造』
（岩波書店, 1980）

常微分方程式の初期値問題

- 常微分方程式系

$$\frac{dX}{dt} = f(X, Y)$$

$$\frac{dY}{dt} = g(X, Y)$$

を“解く”とは、上式を満たすtの関数

$$X = X(t), \quad Y = Y(t)$$

を求めること。

- 初期値問題:時刻 $t = 0$ でのX, Yの値(出発点の値)を与えて解く問題。

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0$$

微分方程式を数値的に解くには

- 時刻をとびとびの値にとる:

$$t_n = n\Delta t \quad (n = 0, 1, \ldots, N)$$

- とびとびの時刻における解の近似値: X_n, Y_n
- 微分を“差分”で置き換える:

$$\frac{dX}{dt} \to \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t}, \qquad \frac{dY}{dt} \to \frac{Y_{n+1} - Y_n}{\Delta t}$$

- 初期値を与えて、X_n, Y_n の値を次々に計算する

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + f(X_n, Y_n)\Delta t \\ Y_{n+1} &= Y_n + g(X_n, Y_n)\Delta t \end{aligned}$$

（オイラー差分法）

Excel で解いてみよう

パラメータの設定

	A	B		C
1	【Lotka–Volterra方程式を解く】			
2	パラメータ	A	B	Δt
3		1	1	0.002

差分式の入力

相対参照と絶対参照（$のついた番号）に注意

初期値

5	t	X	Y
6	0	0.5	0.5
7	=A6+C3	= ……	= ……

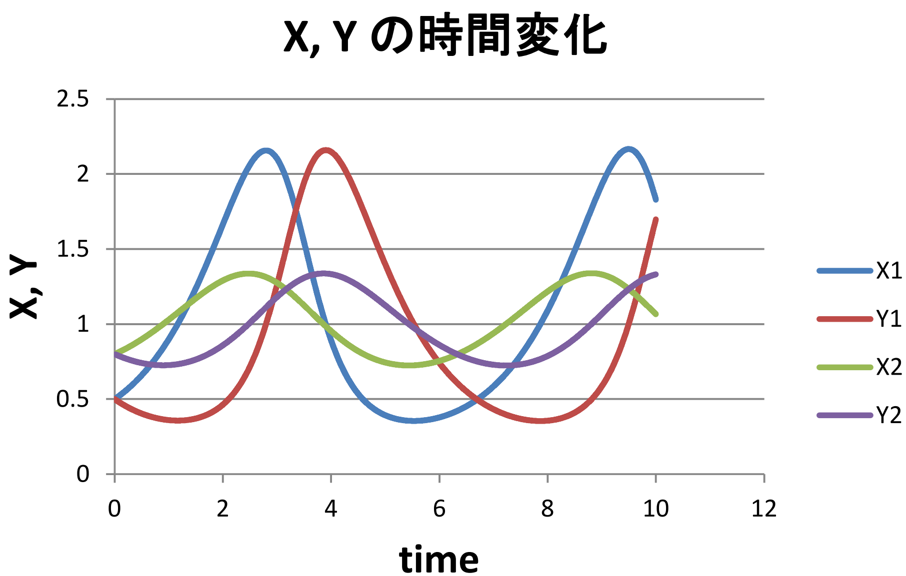
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

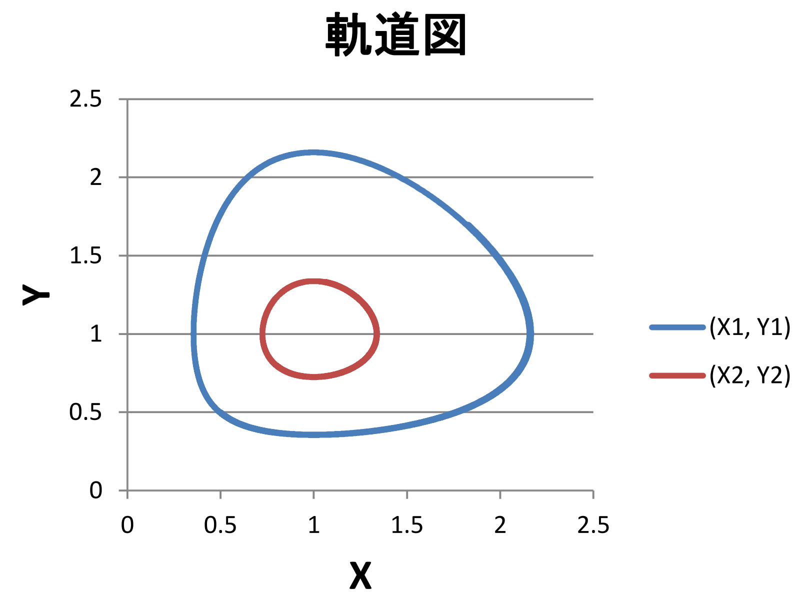
$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, Y_n)\Delta t$$

$$Y_{n+1} = Y_n + g(X_n, Y_n)\Delta t$$

演習課題

- Lotka-Volterra方程式を数値的に解く。
  - いくつかの初期値に対して解く。
  - X, Y の時間変化のグラフと軌道図を描く。





- 上記の課題をレポートとしてA4用紙1枚にまとめ、学籍番号、氏名（自筆）を明記してこの時間内に提出。